UNIVERSIDADE FEDERAL
DO ESPÍRITO SANTO

Lista de Exercícios Complementares - Minicurso: Mecânica Conforme

Ulysses Camara da Silva

Aula 1

1. **(Difícil)** Verifique que as transformações

$$
\begin{aligned}
t' &= \frac{a\,t+b}{c\,t+d}, \; ad-bc=1, \\
x'(t') &= \left(\frac{dt'}{dt}\right)^{1/2} x(t) = \frac{x(t)}{ct+d},
\end{aligned} \tag{1}
$$

são simetrias do potencial conforme, $V(x) \sim 1/x^2$ (faça a transformação na ação).

2. **(Fácil)** Utilizando o resultado do Teorema de Nöther

$$
\begin{aligned}
C_a &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}\left(\delta t_a \dot{\vec{x}} - \Delta \vec{x}_a\right) - \delta t_a\, L + G_a(\vec{x};t), \\
\Delta x &= x'(t') - x(t), \; \delta t = t' - t,
\end{aligned}
$$

calcule as cargas conservadas associadas às simetrias dadas pela equação (1).

3. **(Fácil)** Verifique que o Colchete de Poisson entre duas cargas conservadas é uma carga conservada. *Dica: Utilize a identidade de Jacobi.*

Aula 2

4. **(Muito Difícil)** Faça a troca

$$
\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{f(t)}, \quad Q(\tau) = \frac{x(t)}{\sqrt{f(t)}}, \; f(t) = u + vt + wt^2
$$

diretamente na ação do modelo conforme para chegar em uma nova Lagrangiana para o potencial

$$
V(Q) = \frac{g_c}{Q^2} + \frac{m}{2}\Delta\, Q^2, \; \Delta = uw - \frac{v^2}{4},
$$

5. **(Fácil)** Dada a EDO

$$
\frac{d^2\psi(u)}{du^2} + \left(1 - \frac{g}{u^2}\right)\psi(x) = 0, \tag{2}
$$

faça a troca $\psi(u) = u^{1/2}F(u)$ e mostre que $F(u)$ é solução da equação de Bessel com índice $\nu = \sqrt{1/4 + g}$.

6. **(Intermediário)** Mostre que

$$\begin{aligned}\psi_k(x) \approx \quad & A_\nu(k)\left(\tfrac{2}{k}\right)^{1/2+\nu}\Gamma(1+\nu)\sin\left(kx+\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{\nu\pi}{2}\right)+\\ & B_\nu(k)\left(\tfrac{2}{k}\right)^{1/2-\nu}\Gamma(1-\nu)\sin\left(kx+\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{\nu\pi}{2}\right),\end{aligned}$$

pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\psi_k(x) &\propto \sin\left(kx+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi\nu}{2}+\delta(k)\right),\\ e^{2i\delta(k)} &= \frac{A_\nu(k)e^{-i\frac{\pi\nu}{2}}\left(\frac{2}{k}\right)^{\nu}\Gamma(1+\nu)+B_\nu(k)e^{i\frac{\pi\nu}{2}}\left(\frac{2}{k}\right)^{-\nu}\Gamma(1-\nu)}{A_\nu(k)e^{i\frac{\pi\nu}{2}}\left(\frac{2}{k}\right)^{\nu}\Gamma(1+\nu)+B_\nu(k)e^{-i\frac{\pi\nu}{2}}\left(\frac{2}{k}\right)^{-\nu}\Gamma(1-\nu)}.\end{aligned}$$

Dica: Abra o seno em termos de exponenciais, junte os termos $\sim e^{ikx}$ *e* $\sim e^{-ikx}$ *e então reconstrua um novo seno.*

Aula 3

(Mega Desafio) Faça todo o processo de renormalização para o caso $\nu = 0$, onde a solução geral é

$$\begin{aligned}\psi_0(x) &= C_0x^{1/2}+D_0x^{1/2}\ln(x/L_0),\ k=0,\\ \psi_k(x) &= A_0(k)x^{1/2}J_0(kx)+B_0(k)x^{1/2}N_0(kx),\end{aligned}$$

para concluir que há um estado ligado quando estamos fora do ponto fixo $B_0(k)=0$. A solução $N_0(u)$ é a função de Neumann para $\nu=0$ (*ver Notas de Funções Especiais*), cujos assintóticos são

$$\begin{aligned}N_0(u) &\approx \frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\left(\frac{u}{2}\right)\right),\ u\ll 1,\\ &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi u}}\sin\left(u-\frac{\pi}{4}\right),\ u\gg 1.\end{aligned}$$